

Décidabilité et complexité topologique de langages

Jérémie Cabessa

jeremie.cabessa@unil.ch

INFORGE (Université de Lausanne)

08/02/2005

Plan

- Décidabilité
- Structures lisant des mots infinis
- Complexité topologique des langages reconnus par ces différentes structures

Décidabilité

Un problème est dit **décidable** s'il existe un algorithme qui peut résoudre ce problème en un temps fini sur n'importe quelle entrée possible.

Exemple:

Le problème de savoir si un graphe orienté fini possède un cycle ou pas.

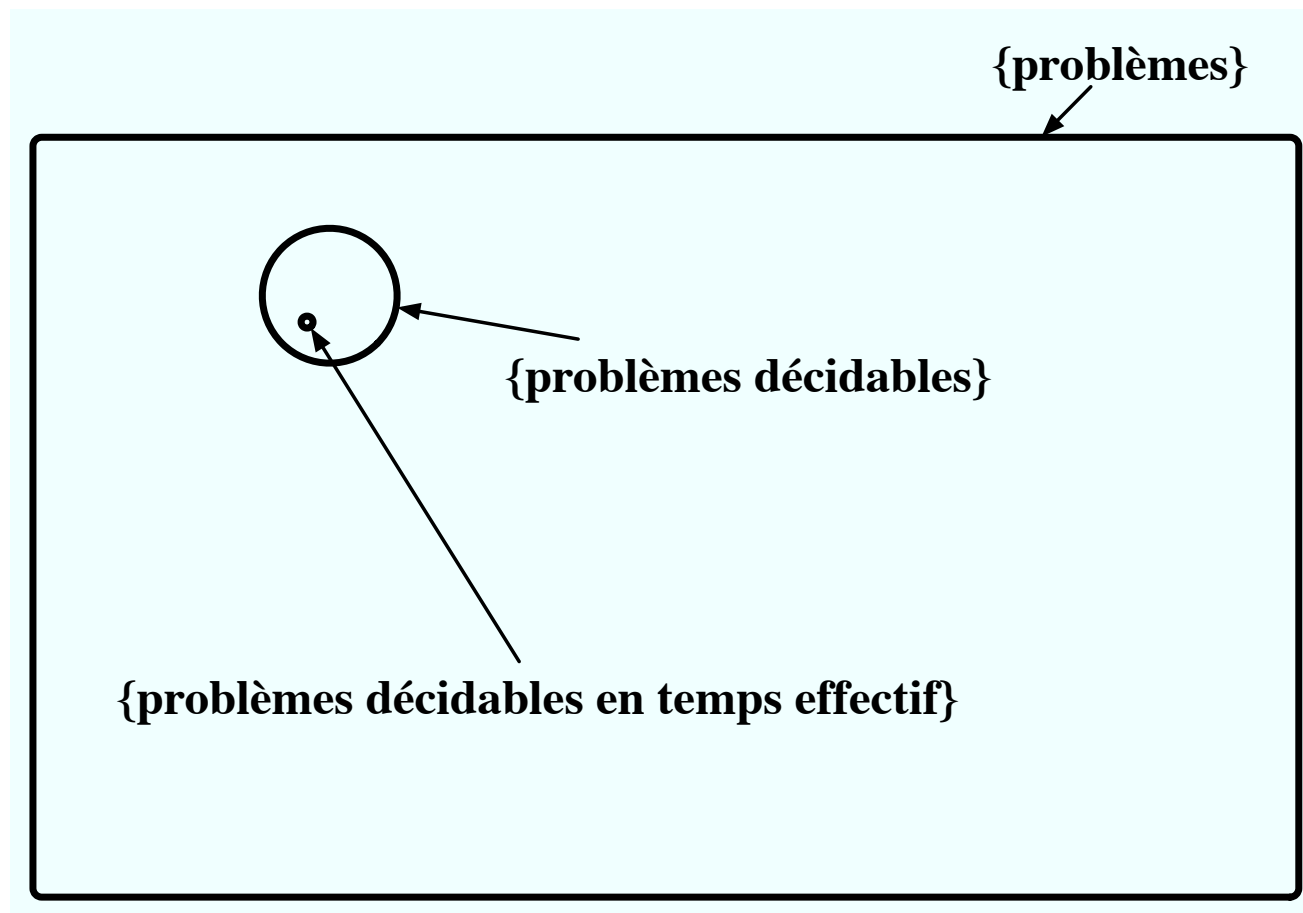
Proposition

Il existe des problèmes indécidables.

démonstration : le problème de l'arrêt est indécidable.

Problème de l'arrêt (Halting Problem):

Soient un programme p et une entrée i , peut-on déterminer si le programme p va s'arrêter sur l'entrée i ou non?

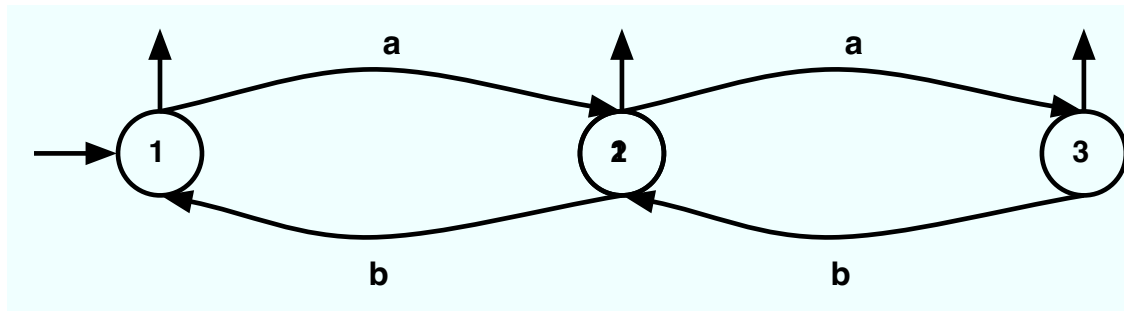


Structures lisant des mots infinis

Un problème est un langage.

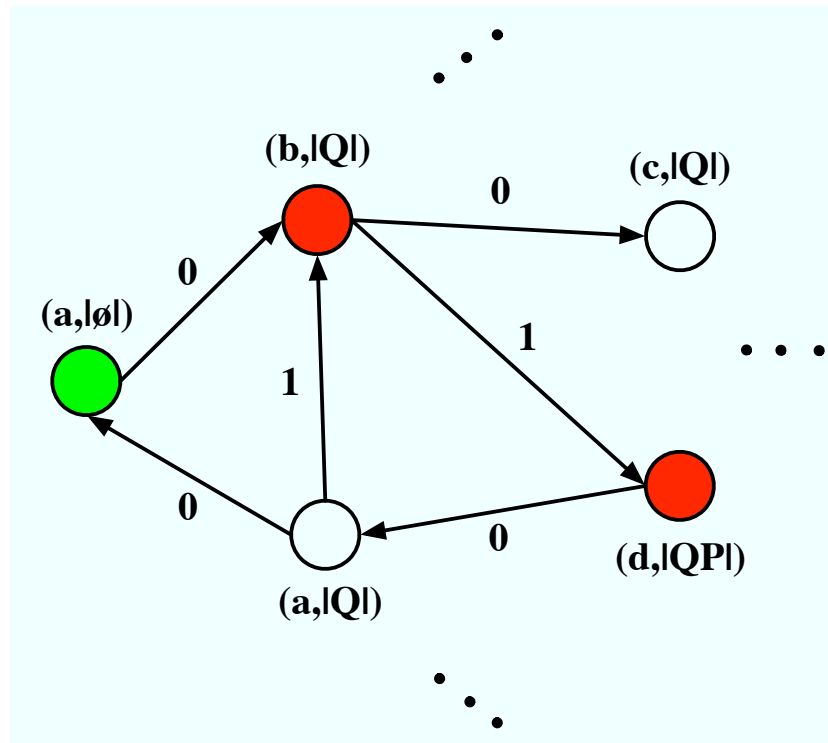
On généralise les concepts d'informatique théorique (automates, automates à pile, machine de Turing) aux cas des mots infinis.

- Automate lisant des mots infinis



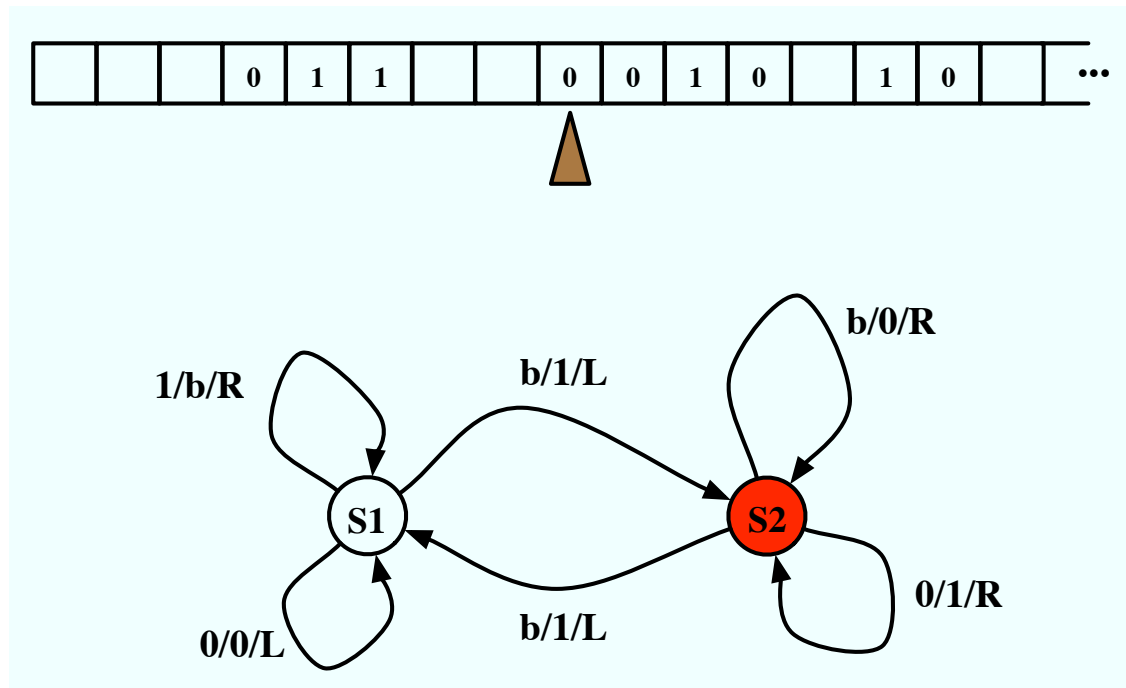
condition de Muller: $\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$

- Automate à pile lisant des mots infinis



condition de Muller: $\mathcal{F} = \{\{b, d\}\}$

- Machine de Turing lisant des mots infinis



condition de Muller: $\mathcal{F} = \{\{S_2\}\}$

Complexité topologique des langages reconnus par ces différentes structures

On définit une *relation de réduction* sur les langages

Soient L et L' deux langages, on a

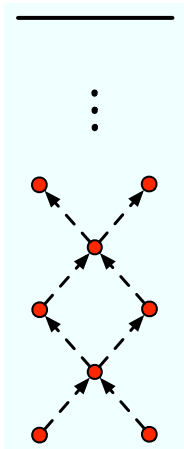
$$\mathbf{L \leq_c L'} \Leftrightarrow_{def} L \text{ est "moins compliqué" que } L'$$

i.e. $\exists f$ "simple" t.q. $(u \in L \Leftrightarrow f(u) \in L')$

Hiérarchies engendrées par cette relation de réduction

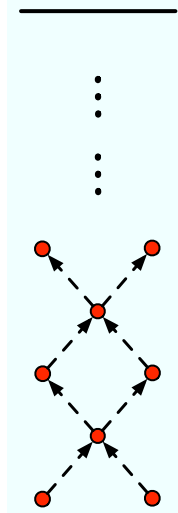
Automate
(mots infinis)

hauteur ω^ω



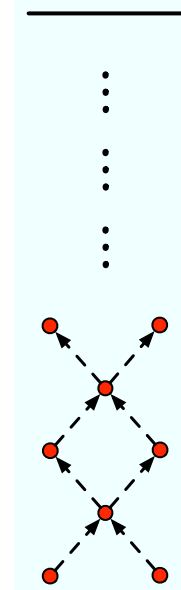
Aut. à pile
(mots infinis)

hauteur $(\omega^\omega)^\omega$



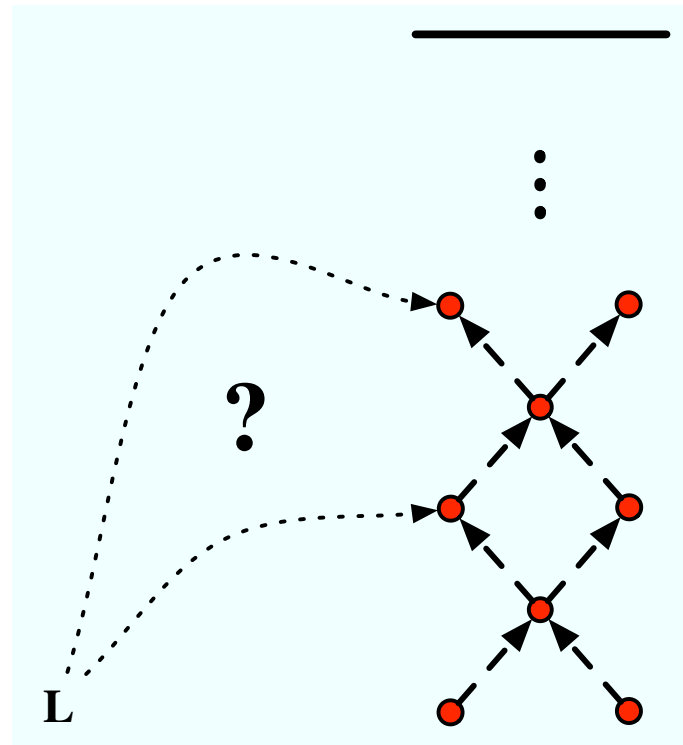
Machine Turing
(mots infinis)

hauteur $(\omega_1^{CK})^\omega$



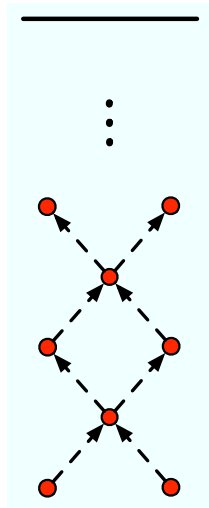
Problème:

Étant donné un langage L , déterminer sa hauteur dans la hiérarchie.



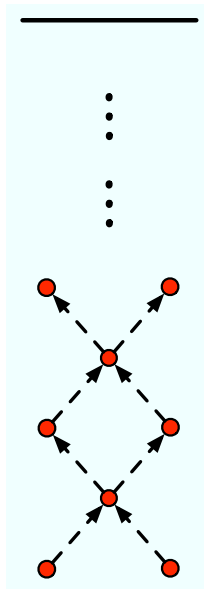
Solutions:

Automate
(mots infinis)



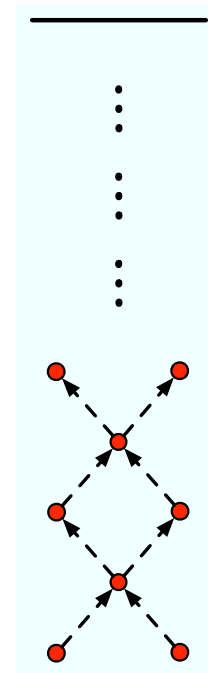
pb résolu

Aut. à pile
(mots infinis)



pb ouvert

Machine Turing
(mots infinis)



pb indécidable

Conclusions

- Il n'y a que très peu de problèmes décidables.
- La complexité topologique donne une idée du pouvoir expressif des structures théoriques qui modélisent le fonctionnement d'un ordinateur.